M-Kurs Mathematik

Aufgabe 1:

1.1: Die Menge der natürlichen Zahlen ist durch das Axiomensystem von PEANO definiert.

Geben Sie geordnet verbal den Inhalt der fünf Axiome an!

1.2: Zeigen Sie:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\frac{1}{2} \cdot (7^n - 1)$ durch 3 teilbar.

1.3: Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(1 + x)^n > 1 + n \times x \quad ; \quad x \in]-1 ; \infty[\setminus \{0\} \quad ?$$

Beweisen Sie Ihre Meinung mit vollständiger Induktion!

Aufgabe 2:

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{4 \cdot x}{1 + |x|} \quad \text{und} \quad g(x) = x \times (3 - x)$$

Diskutieren Sie die beiden Funktionen (Definitionsmenge, 1., 2. und 3. Ableitung, Nullstellen von f, f´, f´´, g, g´ und g´´, Extremwerte, Wendepunkte) und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem!

[G_f : $-4 \leq x \leq +4$; G_g : $-1 \leq x \leq +4$]

Aufgabe 3:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$:

3.1: $f_1(x) = 1 + x$ **3.2:** $f_2(x) = 1 + |x|$ **3.3:** $f_3(x) = \frac{1}{1+|x|}$

3.4: $f_4(x) = \frac{x}{1+|x|}$ **3.5:** $f_5(x) = \left| \frac{4 \cdot x}{1+|x|} - x \cdot (3-x) \right|$

Aufgabe 4:

Gegeben sind die folgenden Funktionen:

1.) $f_1(x) = 1 + x$

2.) $f_2(x) = \frac{2+x}{1+x}$

3.) $f_3(x) = (1 + x^2) \times e^x$

4.1: Beweisen Sie: f_1, f_2 und f_3 sind umkehrbar.

4.2: Bestimmen Sie die Funktionsterme der Umkehrfunktionen f_1^{-1} und f_2^{-1} !

4.3: Bestimmen Sie die Funktionswerte $f_3^{-1}(1)$ und $(f_3^{-1})'(1)$!

Aufgabe 5:

Diskutieren Sie die Funktion f: D ® IR mit

$$f(x) = 10 \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}$$

(Definitionsmenge, Erste und zweite Ableitung, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte,
Graph für $-1 \leq x \leq +7$)