Technische Universität Berlin

Abt. I – Studierenden Service
Studienkolleg / Preparatory Course

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Eignung ausländischer Studienbewerber zum Hochschulstudium im Lande Berlin

Universitätszweig Technik

Sommersemester 2013

Mathematik

Bearbeitungszeit:	**3,5 Stunden**
Erlaubte Hilfsmittel:	**Formelsammlung,** **Taschenrechner** **Einsprachiges, deutsches Wörterbuch**

Von den 4 gegebenen Aufgaben sind 3 nach eigener Wahl zu lösen. In jeder Aufgabe können 20 Punkte erreicht werden. Bei schlechter äußerer Form sind pro Aufgabe 10% Abzug möglich.

Name:

Prüfungsgruppe:

Eingereicht von:

Geprüft von:

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}\cdot e^{-x^3} & \text{für} \quad x>0 \\ 0 & \text{für} \quad x=0 \\ -2\sqrt{-x}\cdot e^{x^3} & \text{für} \quad x<0 \end{cases}$

a) Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften von f. 1
Verwenden Sie die Symmetrieeigenschaften für die weitere Funktionsuntersuchung.

b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ für $x>0$. 3

Zeigen Sie, dass für $x>0$ gilt: $f''(x)=e^{-x^3}\cdot\dfrac{36x^6-36x^3-1}{2\sqrt{x}\cdot x}$

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte und ihre Koordinaten. 4

d) Bestimmen Sie die Art der Wendepunkte und ihre Koordinaten. Verwenden Sie hierfür das Vorzeichenwechselkriterium. 4

e) Prüfen Sie, ob f an der Stelle $x=0$ differenzierbar ist. 4
Begründen Sie, warum bei $x_0=0$ ein Wendepunkt liegen muss.

f) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen. 1

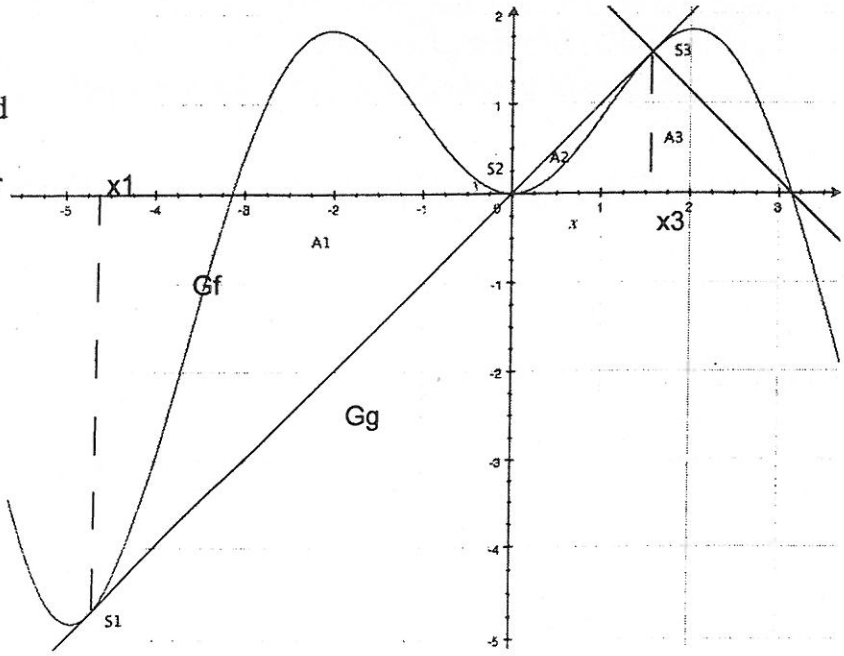
g) Zeichnen Sie den Graphen von f. 3

Aufgabe 2: Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=x\cdot\sin(x)$ und $g(x)=x$. Deren Graphen sind G_f und G_g.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen und bestimmen Sie die Fläche zwischen den Graphen von der ersten negativen (x_1) bis zur ersten positiven Schnittstelle (x_3). 8

b) Die Fläche A3 ist die Fläche zwischen G_f und der x-Achse. Die Normale in S3 schneidet die Fläche A3 in zwei Teile. Berechnen Sie das Verhältnis der Teilflächen. 8



Hinweis: Die gegebenen Graphen dienen nur der Veranschaulichung und dürfen nicht als Ersatz für Berechnungen genommen werden.

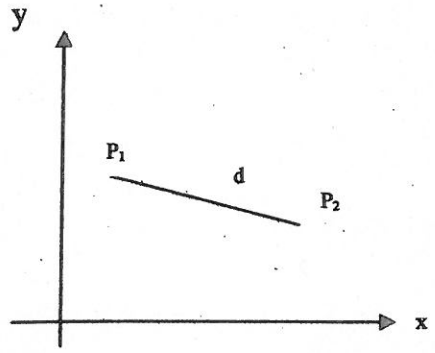
c) Berechnen Sie $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx$ 4

Aufgabe 3: Extremwertproblem

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx + t^2 + \frac{9}{x}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktionenschar und berechnen Sie ihre beiden relativen Extrema. Geben Sie an, für welche t die Schar relative Extrema besitzt. Geben Sie auch die Art der Extrema und ihre Koordinaten an. 6

b) Entwickeln Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung des Abstands d der beiden Punkte P_1 und P_2. 3



c) Bestimmen Sie jetzt t_{min} so, dass der Abstand d(t) der beiden relativen Extrema minimal wird. Zeigen Sie auch, dass es sich um ein absolutes Minimum handelt. 9

d) Berechnen Sie diesen minimalen Abstand und geben Sie den Funktionsterm derjenigen Funktion aus der Schar an, die zu t_{min} gehört. 2

Aufgabe 4: →→→

Technische Universität Berlin

Abt. I – Studierenden Service
Studienkolleg / Preparatory Course

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Eignung ausländischer Studienbewerber zum Hochschulstudium im Lande Berlin

Universitätszweig Technik

Sommersemester 2013

Mathematik

Bearbeitungszeit: 3,5 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung,
Taschenrechner
Einsprachiges, deutsches Wörterbuch

Von den 4 gegebenen Aufgaben sind 3 nach eigener Wahl zu lösen. In jeder Aufgabe können 20 Punkte erreicht werden. Bei schlechter äußerer Form sind pro Aufgabe 10% Abzug möglich.

Name:

Prüfungsgruppe:

Eingereicht von:

Geprüft von:

Lösungen Aufgabe 1:

3 a) Symmetrie

$$f(-x)=\begin{cases} 2\sqrt{-x}\cdot e^{-(-x)^3} & ,-x>0 \\ 0 & ,x=0 \\ -2\sqrt{-(-x)}\cdot e^{(-x)^3} & ,-x<0 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{-x}\cdot e^{x^3} & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ -2\sqrt{x}\cdot e^{-x^3} & ,x>0 \end{cases} = -f(x)$$

$\Rightarrow f$ ist punktsymmetrisch

3 b) für $x>0$:

$$f(x)=2\sqrt{x}\cdot e^{-x^3}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot e^{-x^3}}{2\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot(-3)x^2\cdot e^{-x^3}=e^{-x^3}\cdot\frac{1-6x^3}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=-3x^2e^{-x^3}\frac{1-6x^3}{\sqrt{x}}+e^{-x^3}\cdot\frac{-18x\sqrt{x}-(1-6x^3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=e^{-x^3}\left(\frac{-3x^2+18x^5}{\sqrt{x}}+\frac{-36x^3-1+6x^3}{2\sqrt{x}\,x}\right)$$

$$=e^{-x^3}\frac{-6x^3+36x^6-30x^3-1}{2\sqrt{x}\,x}$$

$$=e^{-x^3}\frac{36x^6-36x^3-1}{2\sqrt{x}\,x}$$

4 c) Extrema

notwendige Bedingung

$f'(x)=0$ für $x>0$:

$$e^{-x^3}\frac{1-6x^3}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow \underbrace{e^{-x^3}=0}_{\text{nicht lösbar}} \vee \frac{1-6x^3}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 1-6x^3=0$$

$$\Rightarrow 1=6x^3 \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}=x}}$$

zusätzliche Bedingung

$f''(x)=0$ $\quad f''\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}\right)=-6{,}22<0 \Rightarrow$ bei $x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}$ liegt ein Hochpunkt

$f\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}\right)=1{,}26 \Rightarrow \underline{\underline{H\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}\,\middle|\,1{,}26\right)}}$

Weil f punktsymmetrisch ist, muss bei $x=-\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}$ ein Tiefpunkt liegen.

$\Rightarrow T\left(-\sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}\,\middle|\,-1{,}26\right)$

Lösungen Aufgabe 1:

d) Wendepunkte

notwendige Bedingung

$f''(x)=0$ für $x>0$:

$$e^{-x^3}\cdot\frac{36x^6-36x^3-1}{2\sqrt{x}\,x}=0 \Rightarrow \underbrace{e^{-x^3}=0}_{\text{nicht lösbar}} \vee \frac{36x^6-36x^3-1}{2\sqrt{x}\,x}=0$$

$$\Rightarrow 36x^6-36x^3-1=0 \qquad |:36$$

$$x^6-x^3-\frac{1}{36}=0 \qquad z=x^3$$

$$z^2-z-\frac{1}{36}=0 \qquad \text{p-q-Formel: } z^2+pz+q=0;\ z_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{36}}$$

$$z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{10}}{6} \qquad z=x^3 \qquad x_1=\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{10}}{6}}\approx \underline{\underline{1{,}01}}$$

$$x_2=\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{10}}{6}}\approx -0{,}30 \rightarrow$$ Das ist nicht innerhalb des betrachteten Intervalls!

zusätzliche Bedingung

Bei $x=\sqrt[3]{\frac{3+10}{6}}$ findet ein Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ statt.

$$\left.\begin{array}{l} f''(1)=-\frac{1}{2e}<0 \\ f''(2)\approx 0{,}12>0 \end{array}\right\}$$ VZW von $\ominus$ nach $\oplus$ $\Rightarrow$ bei $x=\sqrt[3]{\frac{3+10}{6}}$ liegt ein rechts-links-Wendepunkt

$f\left(\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{10}}{6}}\right)=0{,}72$ $\quad \underline{\underline{W_1(1{,}01|0{,}72)}}$

Weil f punktsymmetrisch ist, muss bei $x=-\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{10}}{6}}$ ein rechts-links-Wendepunkt liegen.

$$\underline{\underline{W_2(-1{,}01|-0{,}72)}}$$

Lösungen Aufgabe 1:

(4) e) f ist an der Stelle $x_0=0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert an der Stelle $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}\,e^{-x^3}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x\,e^{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}\,e^{x^3}} = \infty$$

$\Rightarrow$ Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert an der Stelle $x_0=0$ nicht.

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0=0$ nicht differenzierbar

2

Bei $x=0$ muss ein Wendepunkt liegen, weil $f''(x)<0$ für $x\in\left]0;\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{10}}{6}}\right[$; d.h. f ist hier rechtsgekrümmt.

Wegen der Punktsymmetrie gilt: $f''(x)>0$ für $x\in\left]-\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{10}}{6}};0\right[$, d.h. f ist hier linksgekrümmt. $\Rightarrow$ Bei $x=0$ muss ein Wendepunkt liegen. $f(0)=0$ $\quad \underline{\underline{W_3(0|0)}}$

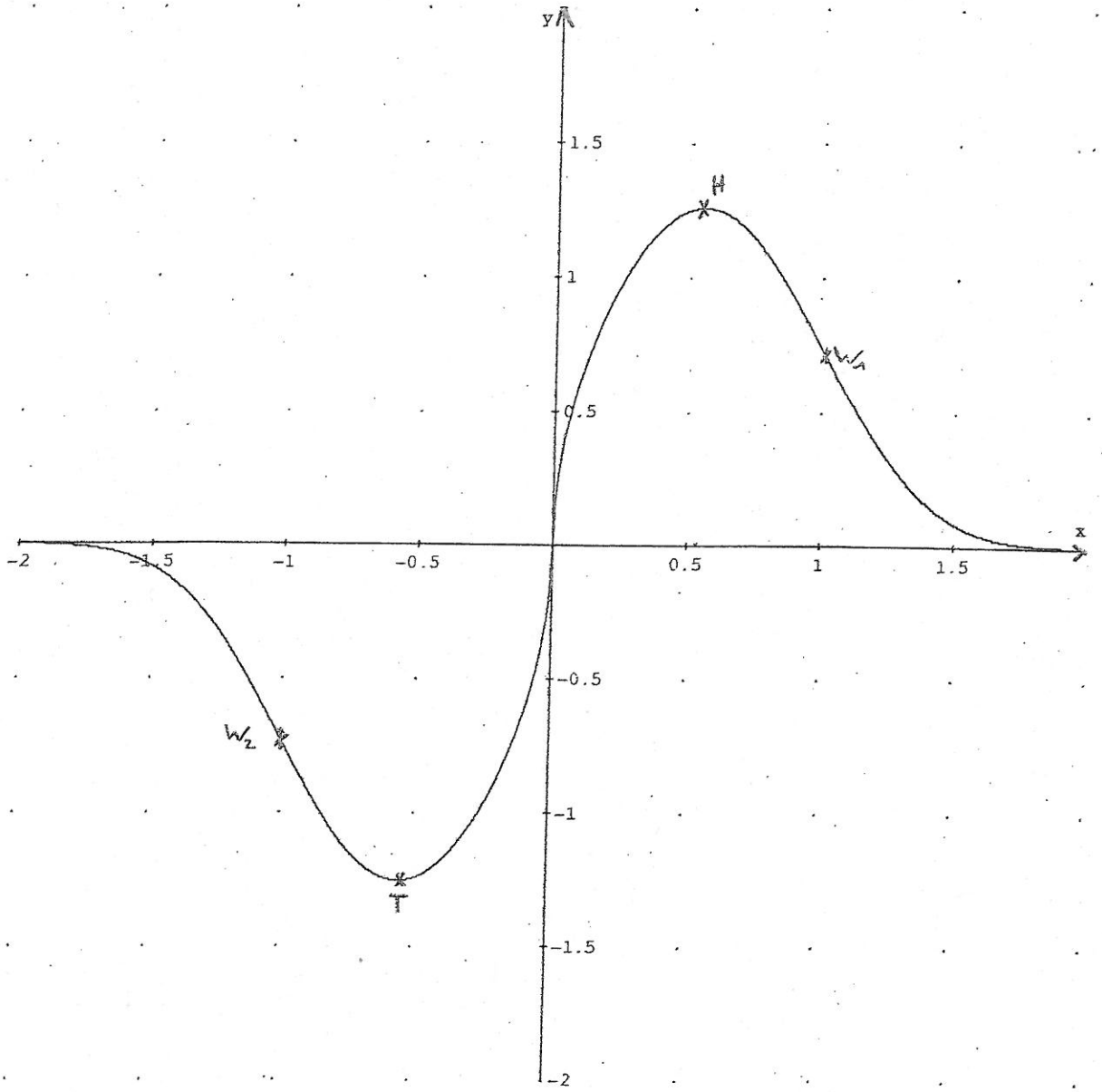
2

(1) f) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x}\,e^{-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{e^{x^3}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{3x^2e^{x^3}} = \frac{1}{3x^2\sqrt{x}\,e^{x^3}} = 0$$

Wegen der Punktsymmetrie gilt: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

(1) g)

Lösungen Aufgabe 1:



Lösungen Aufgabe 2

a) Schnittpunkte: $x_s \sin x_s = x_s \quad x_s(\sin x_s - 1) = 0$

$x_{s_1} = 0 \quad \sin x_s = 1 \quad x_s = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

NS: $x_N \cdot \sin x_N = 0 \quad x_{N_1} = 0 \quad x_{N_2} = k \cdot \pi$

$$A_1 = \left| \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} (x \sin x \, dx - x) \, dx \right| ; \quad A_2 = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

$\int x \sin x \, dx : -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$

$u = x \quad v = -\cos x$

$u' = 1 \quad v' = \sin x$

$$A_1 = \left| \left((-x \cos x + \sin x) - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} \right| =$$

$$\left| \frac{3}{2}\pi \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}\pi^2 \right| = \left| 1 - \frac{9}{8}\pi^2 \right|$$

$A_1 \approx 10{,}1$ FE

$$A_2 = \frac{\pi^2}{8} - \left(-x(\cos x + \sin x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$$

8

$A_2 = \frac{\pi^2}{8} - 1 \approx 0{,}2337$

b) Normale in $S_3 \quad S_3\left(\frac{\pi}{2} \,/\, \frac{\pi}{2}\right)$

$m_N = -\frac{1}{m_T} \quad m_T = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = \sin x + x \cos x \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$m_N = -1$

$\frac{y - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = -1 \quad y = -x + \pi$ Normalengleichung

Lösungen Aufgabe 2:

2. Schnittpunkt Normale / G_f

$y = -x + \pi \qquad y = x \sin x$

$-x_s + \pi = x_s \sin x_s$

$x_{s_1} = \frac{\pi}{2} \; ; \; x_{s_2} = \pi$

$$A_{3a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x)\,dx + \frac{\pi^2}{8}$$

$$A_{3b} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x \sin x)\,dx - \frac{\pi^2}{8}$$

$$A_{3a} = \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{8} \approx 2{,}2337$$

$$A_{3b} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx - \frac{\pi^2}{8} = \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{\pi^2}{8}$$

$$= \pi - 1 - \frac{\pi^2}{8} \approx 0{,}908$$

(8)

$$\frac{A_{3a}}{A_{3b}} \approx 2{,}46$$

c) $$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\,dx = \lim_{k \to \infty} \int_0^{k} e^{-x} \sin x\,dx$$

$$\int e^{-x} \sin x\,dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x\,dx =$$

$u = \sin x \quad v = -e^{-x}$ | $u = \cos x \quad v = -e^{-x}$

$u' = \cos x \quad v' = e^{-x}$ | $u' = -\sin x \quad v = e^{-x}$

$$= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x\,dx$$

(4)

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{k} e^{-x} \sin x\,dx = \lim_{k \to \infty} -\frac{e^{-x}}{2}\left(\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{k} = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

Lösungen Aufgabe 3:

a) $f_t(x) = tx + t^2 + \frac{9}{x}$, $D_{f_t} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(6) $f_t'(x) = t - \frac{9}{x^2}$, $f_t''(x) = \frac{18}{x^3}$

$f_t'(x_E) = 0 \Leftrightarrow t - \frac{9}{x_E^2} = 0 \Leftrightarrow x_{E_{1/2}} = \pm \frac{3}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow f_t$ besitzt nur rel. Extrema für $t \in \mathbb{R}^+$

$f_t''\left(\frac{3}{\sqrt{t}}\right) = \frac{18t\sqrt{t}}{27} > 0 \Rightarrow$ rel. Min. in $x_{E_1} = \frac{3}{\sqrt{t}}$

$f_t''\left(-\frac{3}{\sqrt{t}}\right) = \frac{18t\sqrt{t}}{-27} < 0 \Rightarrow$ rel. Max. in $x_{E_2} = -\frac{3}{\sqrt{t}}$

$f_t\left(\frac{3}{\sqrt{t}}\right) = t \cdot \frac{3}{\sqrt{t}} + t^2 + \frac{9\sqrt{t}}{3} = t^2 + 6\sqrt{t} \Rightarrow T = \left(\frac{3}{\sqrt{t}} \middle| t^2 + 6\sqrt{t}\right)$

$f_t\left(-\frac{3}{\sqrt{t}}\right) = \frac{t(-3)}{\sqrt{t}} + t^2 + \frac{9\sqrt{t}}{-3} = t^2 - 6\sqrt{t} \Rightarrow H = \left(-\frac{3}{\sqrt{t}} \middle| t^2 - 6\sqrt{t}\right)$

b) Abstand zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1 / y_1)$ und $P_2 = (x_2 / y_2)$:

(3) $d(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$

c) NB: $x_1(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$, $x_2(t) = \frac{-3}{\sqrt{t}}$, $y_1(t) = t^2 + 6\sqrt{t}$, $y_2(t) = t^2 - 6\sqrt{t}$

(9) $\Rightarrow d(t) = \sqrt{\left[t^2 + 6\sqrt{t} - (t^2 - 6\sqrt{t})\right]^2 + \left[\frac{3}{\sqrt{t}} - \left(-\frac{3}{\sqrt{t}}\right)\right]^2}$

$= \sqrt{144t + \frac{36}{t}}$ (ZF)

$d'(t) = \frac{144 - \frac{36}{t^2}}{2\sqrt{144t + \frac{36}{t}}} = \frac{72 - \frac{18}{t^2}}{\sqrt{144t + \frac{36}{t}}}$, $d''(t) = \frac{36}{t^3\sqrt{144t + \frac{36}{t}}} - \frac{\left(72 - \frac{18}{t^2}\right)^2}{\sqrt{144t + \frac{36}{t}}^3}$

$d'(t_E) = 0 \Leftrightarrow 72 - \frac{18}{t_E^2} = 0 \Leftrightarrow t_E = \frac{1}{2}$ (da $t \in \mathbb{R}^+$)

$d''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8 \cdot 36}{\sqrt{72 + 72}} - 0 > 0 \Rightarrow$ rel. Min. in $t_E = \frac{1}{2}$

Untersuchung der Grenzen:

$\lim_{t \to 0^+} d(t) = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{144t + \frac{36}{t}} = \left[\sqrt{0 + \frac{36}{0}}\right] = \left[\sqrt{0 + \infty}\right] = \infty$

$\lim_{t \to \infty} d(t) = \lim_{t \to \infty} \sqrt{144t + \frac{36}{t}} = \left[\sqrt{\infty + \frac{36}{\infty}}\right] = \left[\sqrt{\infty + 0}\right] = \infty$

$\Rightarrow$ abs. Min. in $t_E = \frac{1}{2}$

d) $d\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{144 \cdot \frac{1}{2} + 36 \cdot 2} = \sqrt{144} = 12$

(2) $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{9}{x}$

Lösungen Aufgabe 4 a) :

$$\boxed{|2x-3| + |x^2-1| \leq 4}$$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{f. } x \geq \frac{3}{2} \\ 3-2x & \text{für } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } x \leq -1 \text{ und } x \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{für } -1 < x < 1 \end{cases}$$ 1

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x \leq -1$

$3-2x+x^2-1 \leq 4$

$\Rightarrow x^2-2x-2 \leq 0$ Nullstellen: $x_1 \approx 2{,}73$, $x_2 \approx -0{,}73$

$\Rightarrow$ Ungleichung erfüllt für $-0{,}73 \leq x \leq 2{,}73$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$ 1

2. Fall $-1 < x < 1$

$3-2x+1-x^2 \leq 4$

$\Rightarrow x^2+2x \geq 0$ Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$

$\Rightarrow$ Ungleichung erfüllt für $x \leq -2$ und $x \geq 0$

$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = [0;1[$ 1

3. Fall $1 \leq x < \frac{3}{2}$

$3-2x+x^2-1 \leq 4$

$\Rightarrow x^2-2x-2 \leq 0$ wie in Fall 1

$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = [1;\frac{3}{2}[$ $\frac{1}{2}$

4. Fall $x \geq \frac{3}{2}$

$2x-3+x^2-1 \leq 4$

$\Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0$ Nullstellen: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

$\Rightarrow$ Ungleichung erfüllt für $-4 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow \mathbb{L}_4 = [\frac{3}{2};2]$ 1 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 = [0,2]$ $\frac{1}{2}$

Lösungen Aufgabe 4 d) :

$$2\cos x - 2\cos^3 x - \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x \left(2 - 2\cos^2 x - \sin x - 1\right) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \quad (1)$$

$$2 - 2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (1)$$

Substitution: $u := \sin x$

$$\Rightarrow 2u^2 - u - 1 = 0$$

Nullstellen: $u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$

$$u_1 = 1 \quad u_2 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Rücksubstitution:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \quad x = \frac{11\pi}{6} \quad (1)$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad (1)$$

Lösungen Aufgabe 4 b) :

$$\log_8 (x+8)^3 + \log_2 (2x-1) = \log_2 (21x)$$

Definitionsbereich:

$$\left.\begin{array}{lll} (x+8)^3 > 0 & \Rightarrow & x > -8 \\ (2x-1) > 0 & \Rightarrow & x > \frac{1}{2} \\ 21x > 0 & \Rightarrow & x > 0 \end{array}\right\} \quad \mathbb{D} = \left]\frac{1}{2}, \infty\right[\quad (1)$$

$$\log_8 (x+8)^3 + \log_2 (2x-1) - \log_2 (21x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\log_2 (x+8)}{\log_2 8} + \log_2 \frac{2x-1}{21x} = 0 \quad \text{gemischtes Log.} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{(x+8)(2x-1)}{21x} = 0 \quad \text{Subtraktionsregel Log.}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+8)(2x-1)}{21x} = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 15x - 8 = 21x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \quad (1)$$

Nullstellen:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_1 \notin \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{4\} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

Lösungen Aufgabe 4 c) :

$$\sqrt{2x^2-5x+7} > x+1$$

Definitionsbereich:

Bedingung: $2x^2-5x+7 \geq 0$

Nullstellen $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-56}}{4}$ $\Rightarrow$ keine reellen Nullstellen

$\Rightarrow$ $2x^2-5x+7$ ist immer positiv, da $2x^2-5x+7 \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ (1)

<u>1. Fall</u>: $x+1 < 0$ Ungleichung erfüllt

$\Rightarrow$ $\underline{x < -1}$

$\mathbb{L}_1 =]-\infty, -1[$ (1)

<u>2. Fall</u>: $x+1 \geq 0$, d.h. $\underline{x \geq -1}$

$\Rightarrow$ Quadrieren ist erlaubt

$\Rightarrow$ $2x^2-5x+7 > x^2+2x+1$

$\Rightarrow$ $x^2-7x+6 > 0$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$

$x_1 = 1$, $x_2 = 6$ (1)

$\Rightarrow$ Ungleichung erfüllt für

$-1 \leq x < 1$ und $x > 6$

$\mathbb{L}_2 = [-1, 1[\cup]6, \infty[$ (1)

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty, 1[\cup]6, \infty[$

$= \mathbb{R} \setminus [1, 6]$

(1)