FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
STUDIENKOLLEG

D-12249 BERLIN LANKWITZ
MALTESERSTRASSE 74 - 100
Telefon +49 (0)30 83870130
E-Mail studienkolleg@fu-berlin.de

Fach Mathematik	**Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschuleignung** **Musterklausur**	**W-OK** und **externe Bewerber**

Von den fünf Aufgabenvorschlägen sind **drei** vollständig zu bearbeiten.
Alle wesentlichen Rechenschritte sind durch kurze Texte zu erläutern.

Bearbeitungszeit : 240 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)

Vorschlag 1: (Flächenberechnung)

Gegeben seien die Funktionen f mit $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + \frac{27}{2}x$ und g mit $g(x) = -2x^3 + \frac{9}{2}x^2$.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle von f und g für alle ganzzahligen Werte im Bereich $-2 \le x \le 3$

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von f und g .

c) Fertigen Sie eine Zeichnung der Graphen von f und g unter Verwendung der Punkte aus Teil a) und b) (x-Achse: **1 Einheit ≅ 2 cm**; y-Achse: **5 Einheiten ≅ 1 cm**) auf Millimeterpapier an und schraffieren Sie die Flächenstücke, die von beiden Graphen umschlossen werden.

d) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

e) Das rechte der Flächenstücke wird durch die Gerade h , die durch die beiden rechten Schnittpunkte geht, in zwei Teilflächen zerlegt:

I) Zeichnen Sie die Gerade in die Zeichnung aus Teil c) ein und markieren Sie die Teilflächen.

II) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h .

III) Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

Vorschlag 2: (Rekonstruktion einer Funktionsgleichung aus vorgegebenen Eigenschaften)

a) Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, deren Graph die y-Achse bei $\frac{20}{3}$ schneidet, besitzt die Wendestelle x = 3 . Die Steigung von f an der Stelle x = -2 ist gleich -12. Die kleinste positive Nullstelle von f ist x = 2 . Der Inhalt A der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im ersten Quadranten über dem Intervall [0;2] einschließt, beträgt $\frac{212}{15}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f .

b) Bestimmen Sie alle Wendetangenten von f.

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
STUDIENKOLLEG

D-12249 BERLIN LANKWITZ
MALTESERSTRASSE 74 - 100
Telefon +49 (0)30 83870130
E-Mail studienkolleg@fu-berlin.de

Vorschlag 3: (Gebrochen-rationale Funktionen)

Gegeben sei die Funktionenschar $f_a(x) = \dfrac{x^3 - a}{(x-3)^2}$; $a \in \mathbb{R}$:

a) Für welchen Wert von $a > 0$ besitzt f_a die relative Extremalstelle $x = 2$?

b) Führen Sie für f_{14} $(a = 14)$ eine Kurvendiskussion durch:

I) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und das Verhalten bei den Definitionslücken.

II) Bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

III) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte.

IV) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $x = -10; -5; 0; +6; +15$.

c) Zeichnen Sie die Graphen von f_{14} und seine Asymptoten mit Hilfe der Ergebnisse aus b) in ein Koordinatensystem auf Millimeterpapier.
<u>Maßstab</u>: x-Achse: **2 Einheiten ≅ 1 cm** und y-Achse: **4 Einheiten ≅ 1 cm**.

Vorschlag 4: (Extremwertproblem)

Ein Zelt hat die Form eines Zylinders mit aufgesetztem Kegel.

a) Die Höhe H des Zylinders beträgt 3m und die Länge der Mantellinie s des Kegels ist 4m . Bei welchem Radius ist das Volumen des Zeltes maximal. Wie groß ist dieses maximale Volumen? Wie hoch ist das Zelt bei diesem Radius? Fertigen Sie eine beschriftete Skizze (Querschnitt) des Sachverhalts an. (**Hinweis:** Verwenden Sie die Höhe des Kegels als Variable der Zielfunktion.)

b) Wie groß ist das maximale Volumen des Zeltes und der zugehörige Radius bzw. die zugehörige Höhe, wenn s dreimal so groß ist wie H ?

Vorschlag 5: (Analytische Geometrie)

Gegeben seien die Punkte $A(1 \mid -2 \mid -3)$, $B(-2 \mid 0 \mid -7)$ und $C(7 \mid -12 \mid -11)$:

a) Zeigen Sie , dass die Punkte A , B und C nicht auf einer Geraden liegen. Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E_1, die durch die Punkte A , B und C geht, an.

b) Bestimmen Sie die Spurgeraden von E_1 in der xz-Ebene und der yz-Ebene.

Seien weiter zwei Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

c) Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 in einer Ebene E_2 liegen, indem Sie den Schnittpunkt von g_1 und g_2 bestimmen.

d) Geben Sie eine Parametergleichung und eine Normalengleichung von E_2 an.

e) Bestimmen Sie die Achsenabschnitte von E_2.

f) Welche Lage nehmen die Ebenen E_1 und E_2 zueinander ein? Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

g) Zeigen Sie, dass die Ebene E_3: $\langle \vec{x}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 13$ und die Gerade g_1 parallel sind. Bestimmen Sie den Abstand von der Gerade g_1 zu der Ebene E_3.

h) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von g_2 und E_3 .